2022-2023学年高数D
期末串讲

主讲人：王鹏翔

1 函数

不再讲基本概念. 讲一下与后面极限有关的.

① 有界/无界. 4.5 后面几条 是对无限数集而言的, 有限数集一定有界

局部有界：是与极限过程绑定的：(极限的有界性对应的极限过程)

有界 / 有上界 / 有下界

数列 $n\to\infty$ $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n>N, |x_n|<M \,/\, x_n<M \,/\, x_n>-M$

函数 $x\to x_0$ $\exists\delta>0, |x-x_0|<\delta$时, $|f(x)|<M \,/\, f(x)<M \,/\, f(x)>-M$

$x\to+\infty$ $\exists X, \forall x>X, \cdots$

⋮

整体有界：

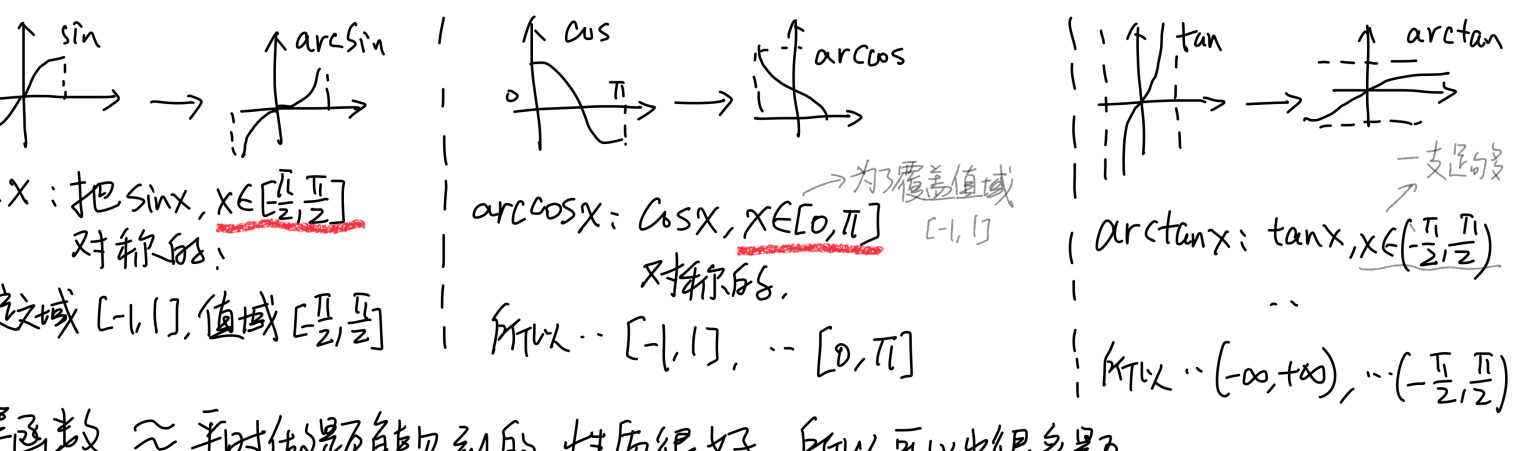
数列：等价于局部有界. $\forall n>N, |x_n|<M/\cdots/\cdots$

函数：一般指在定义域内, $\forall x\in D, |f(x)|<M/\cdots/\cdots$

② 隐函数：没有显式表达式, 函数由方程确定

是一块独立的内容, 可以单独拎出来复习 隐函数求导, 高阶导/微分

③ 反三角函数. 注意定义域



arcsin x：把 sin x, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 对称的：所以定义域 $[-1,1]$, 值域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

arccos x：cos x, $x\in[0,\pi]$ →为了覆盖值域 $[-1,1]$ 对称的, 所以∴ $[-1,1]$, ∴ $[0,\pi]$

arctan x：tan x, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 一支足够 ∴ 所以∴ $(-\infty,+\infty)$, ∴ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

④ 初等函数 ≈ 平时做题能见到的, 性质很好, 所以可以出很多题

(在定义域内)
- 连续 ⇒ 可积(定积分)
  - ⇒ 可积(不定积分) 原函数存在 ⇒ N-L公式求定积分
- 无穷阶可导. 可微

2 极限

① 极限定义：包括两个要素
- 自变量的变化过程 (n, x)
  - $n\to\infty$(数列)；$x\to x_0$；$x\to+\infty,-\infty,\infty$；$x\to x_0+0, x_0-0$ 　7种
  - ↓决定的
- 因变量的变化过程 ($x_n, f(x)$)
  - $\cdots\to A$；$\to+\infty,-\infty,\infty$ 　4种

7种 × 4种 = 28种极限

负责　负责

数学务极定义 $\boxed{\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, |x-x_0|<\delta时,}\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon}$

要掌握!

② 题型：极限的证明
- 抽象的定理证明 —— 看提纲的定理部分, 自己练习
- 具体的例子证明 → 用定义证 I / 套用定理 II

I. 例：证极限除法：$f(x)\to A, g(x)\to B\neq0, x\to+\infty$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{A}{B}$

步骤：分析最后式子 ↓ 凑出 ε 的取法 ↓ 得到自变量的条件 (填空) 这是关键!

思路：把 $\forall\varepsilon>0, \exists X_1, \forall x>X_1, |f(x)-A|<?\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0, \exists X_2, \forall x>X_2, |g(x)-B|<?\varepsilon$

揉合到 $\forall\varepsilon>0, \exists X=\boxed{}, \forall x>X$, $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon$

↙分析此式

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{g(x)}+\frac{A}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|$$

放大, 为了必要条件 $\le\left|\frac{f(x)-A}{g(x)}\right|+\left|\frac{A(g(x)-B)}{Bg(x)}\right|$ (注：由 $g(x)\to B\neq0$, 可得 $\exists X_3, x>X_3$, $|g(x)|>\frac{|B|}{2}$. 自己思考为什么?)

$\le\frac{?\varepsilon}{|B|/2}+\left|\frac{A}{B}\right|\frac{?\varepsilon}{|B|/2}$

$=\varepsilon?$

凑 $\frac{|B|\varepsilon}{4}$ 得 $\frac{\varepsilon}{2}$；凑 $\frac{|B|^2\varepsilon}{4|A|}$ 得 $\frac{\varepsilon}{2}$；相加为 ε

$X=\max\{X_1,X_2,X_3\}$

II. 可用的定理. 一般是两边夹定理. 掌握放缩的技能

③ 题型：讨论极限不存在
- 用定义证(要会写极限定义的否定)
- Heine定理的逆否：找两个子序列, 收敛不同 或某个子序列不收敛
- 左右极限

例：$\sin\frac{1}{x}, x\to0$：$x_n=\frac{1}{2n\pi}\to0, n\to\infty$, $\sin\frac{1}{x_n}=\sin(2n\pi)=0\to0$；$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to0, n\to\infty$, $\sin\frac{1}{y_n}=\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1\to1$

$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}, x\to0$：$x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to0, \cdots=\sqrt{2n\pi}\cos(2n\pi)=\sqrt{2n\pi}\to\infty$

期中：$\ln(1+\cos\frac{1}{x}), x\to0$：$x_n=\frac{1}{2n\pi+\pi}\to0$ 时有 ln0 无定义

④ 题型：求极限(计算)

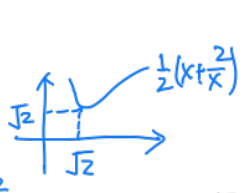
可用的法则
- 基本
  - (初等函数)连续性
  - 两个重要极限 $\frac{\sin x}{x}\to1, x\to0$；$(1+\frac{1}{n})^n\to e$；$(1+\frac{1}{x})^x\to e, x\to\infty$
  - 等价无穷小：$\sin x\sim x$ ($\tan x$), $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$, $e^x-1\sim x$ ($\ln(1+x)$), $\arcsin x\sim x$ ($\arctan x$), $x\to0$ △
- 组合规则
  - 四则运算
  - 复合函数 → 换元 ↗换系数 ↘平移点的位置 …
- 单调有界必有极限(常用于用递推公式定义的数列)
- 洛比达(可用于较复杂的幂指函数, ∞-∞, 0·∞等)

例1. $\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}, x\to0$ (凑1) $=\frac{1-\cos3x-(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1-\cos3x}{\frac12(3x)^2}\cdot\frac92-\frac{1-\cos x}{\frac12x^2}\cdot\frac12\to\frac92-\frac12=4$

例2. $\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}, x\to\infty$ (套$(1+\frac1x)^x\to e$) $=\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2-2+2}=\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2-2}\cdot\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{2}\to e^3\cdot1=e^3$ (注：$x^2-2\to\infty$)

例3. $(1+x^2)^{\frac1x}, x\to\infty$ (无法套$(1+\frac1x)^x\to e$ 幂指考虑洛比达) $=e^{\frac1x\ln(1+x^2)}$　$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$, 则 $\cdots\to e^0=1$

例4：$x_{n+1}=\frac12(x_n+\frac{2}{x_n}), x_1>\sqrt2$.



先证单调性 有极限：$x_1>\sqrt2\Rightarrow x_n>\sqrt2$；$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_n}-\frac{x_n}{2}=\frac{2-x_n^2}{2x_n}<0$. ↓, 有界 ⇒ 有极限.

递推式两边求极限：设极限为A, 则 $A=\frac12(A+\frac2A)$, 解得 $A=\sqrt2$ 或 $-\sqrt2$ 舍去. 思考为什么?

3 函数的连续性

① 在一点连续. 与极限存在的区别只在 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ / $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$　前提：在该点有定义

证连续的题本质上是求极限. 由于初等函数在定义域连续, 所以出题一般是问比较奇怪的点, 如 $f(x)=\begin{cases}\cdots式子, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 证0点处连续

记好一些概念：第x类间断点, 可去间断点, … 左右连续

② 闭区间连续函数 是很好的函数!

注意定义：(a,b)连续 a右连续 b左连续

性质
- 有最大值. 最小值(所以有界)
- 中间值定理 → 有应用, 可以出题 例→ 方程求根
- 可积
- 积分中值定理 ⇒ 原函数存在定理 ⇒ 微积分基本定理

知道即可, 当作定积分证明的前提

4 导数

① 导数的定义, 几种等价形式 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$　关系：极限的换元

本质 → 极限.

用导数定义求导数就是一道求极限题 (不是函数本身的极限 而是导另一个函数的极限)

② 题型：讨论导数的存在性 方法
- 必要条件：连续
- 定义
- 左右导数

$f(x)=\begin{cases}\cdots式子, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 不仅可讨论连续, 还可进一步讨论 可导 / 求导数 / 导数连续

例：$f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$, g(x)二阶连续导数, $g(0)=1, g'(0)=-1$

求f'(x)并讨论导数的连续性

$f'(x)=\begin{cases}x\neq0, 用导数公式 =\frac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}=\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}\\ x=0, 用定义. \lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{g(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\frac{g(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{(\Delta x)^2}\overset{洛比达}{=}\lim\frac{g'(\Delta x)+e^{-\Delta x}}{2\Delta x}\overset{洛比达}{=}\lim\frac{g''(\Delta x)-e^{-\Delta x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}\end{cases}$

$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xg'(x)+(x+1)e^{-x}-g(x)}{x^2}$ 洛 $=\lim_{x\to0}\frac{xg''(x)-xe^{-x}}{2x}=\frac{g''(0)-1}{2}$ // 所以f'(x)在0处连续

则f'(x)在$(-\infty,+\infty)$连续.

③ 题型：求导数/高阶导数 可用的法则
- 基本导数公式
- 性质
  - 线性性质, 乘除求导
  - 复合函数求导 △ 易错
  - 反函数求导
  - 幂指函数求导　用 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ 推导即可, 不必硬背公式

④ 题型：隐函数求导：关于x, y的方程 F(x,y)=0

↓两边对自变量x求导 注意y是x的函数 y(x)

关于x, y, y'的方程 ↓解出y' → ✓ y'=关于x, y的式子

关于x, y, y'的方程 → 再对x求导 → 关于x, y, y', y''的方程 ↓解出y'' → y''=关于x, y, y'的式子 ← 代入 → ✓ y''=关于x, y的式子

5 微分

关注 微分与导数的对应

	导数	微分
数学对象	数(极限)	函数(关于变化量Δx) x-x₀
定义(在一点)	$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$	$\Delta f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$ (A→数) $df(x)\|_{x=x_0}$ Δx写作dx
关系	等价：可导 ⇔ 可微, 此时 $df(x)\|_{x=x_0}=f'(x_0)dx$ 或 $A=f'(x_0)$ 由此得到微分的性质、法则. 平行推广	

所以, 微分的题就是导数的题

6,7 中值定理与导数的应用

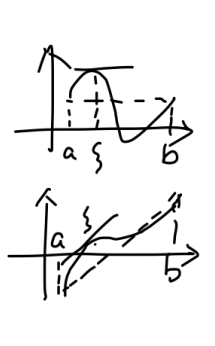
两个层次
- 会应用 ——→ 基本要求, 必须会
- 会定理的证明 ——→ 有利于做出难的证明题 (不是硬背, 而是能自己想出证明的思路)

(本章定理基本可以看作极限与导数的经典证明题, 是练手证明题的好素材)

这里不讲证明, 只带着过一遍知识点和题型

① 中值定理

	对函数的要求	结论
罗尔	闭连续, 开可导 △	若f(a)=f(b), 则∃ξ∈(a,b), f'(ξ)=0
拉格朗日	同上	∃ξ∈(a,b), $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
柯西	同上, 外加g, g'≠0	∃ξ∈(a,b), $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

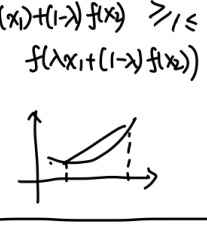


洛比达
- ① 某邻域内可导(g, g'≠0) 连续
- ② f/g 未定式 $\frac00, \frac\infty\infty$
- △ ③ f'/g' 极限存在(包括∞) (结果存在)

$\Rightarrow\lim\frac fg=\lim\frac{f'}{g'}$.

题型：
- 2 证明不等式 → 想办法构造 f(x), [a,b] 化成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ → 对f'(ξ)估计放缩, 变成不等式
- 3 证明恒等式 → 先证导数恒等, 得两边差一个常数 → 再找一个点代入解出常数=0

② 导数的应用 —— 判断函数的性质

	0阶导数(原始定义)	1阶导数	2阶导数
单调性(区间)	$f(x_1)\gtrless f(x_2), x_1>x_2$	符号(区间)	
极值(某点)	$\exists\delta>0, \|x-x_0\|<\delta$时 $f(x)\gtrless f(x_0)$	符号(邻域) 注：必要条件：在该点为0(费马定理)	符号(该点)
最值(区间)	极值 + 特殊点		
凹凸性(区间)	$\forall x_1,x_2, \lambda\in(0,1)$, $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\gtrless f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ 	$\forall x, x_0$, $f(x)\gtrless f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	符号(区间)
渐近线	水平：$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}f(x)=A$ 垂直：$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\pm\infty$ 斜：$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}\frac{f(x)}{x}=k$		

此外, 还要记好一些概念：驻点、鞍点、拐点、等

题型见提纲

8 不定积分 —— 求导的逆过程

求不定积分的方法
- 基本不定积分表 —— 导数公式
- 性质
  - 线性性质(分项积分法) —— 导数线性性质
  - 换元定理
    - 第一换元定理(凑微分法)
    - 第二换元定理(作代换法) —— 复合函数求导
  - 分部积分法 —— 乘积求导

$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b$ N-L公式 求定积分 注意上下限的代入对应(与d后面的变量一致)

解题思路：先易后难的顺序
- ① 牢记, 敏感, 注意几个容易忘的 $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \int\frac{1}{1+x^2}dx, \int\frac{1}{\cos^2x}dx, \int\frac{1}{\sin^2x}dx$
- ② 熟悉各种变换、恒等式 例：$1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$, $\frac{1}{x(x+a)}=\frac1a(\frac1x-\frac{1}{x+a})$, 积化和差公式, 倍角公式, …
- ③ 善于观察(多位置)同时出现的式子及其导数 $x^2; xdx$, $\sin x; \cos xdx$, $\ln x; \frac{dx}{x}$, …
- ④ ↗三角换元：适用于 x^2, a^2 的组合式, 根据定义域选择换元函数 → $\sqrt{x^2+a^2}$：$x\in\mathbb{R}$; 令 $x=a\tan t$；$\sqrt{a^2-x^2}$：$x\in(-a,a)$, 令 $x=a\sin t$ / $a\cos t$；$\sqrt{x^2-a^2}$：$|x|>a$, 令 $x=a\sec t$ / $a\csc t$
  ↘一元换掉复杂的：直接令 t=(难处理的式子), 通常要求这个式子能反解 例：$t=\sqrt{ax+b}$, $t=x+\sqrt{x^2-1}$
- ⑤ 观察是否可以分解为两部分 f(x)g(x) 使得一"升"一"降"后积分更容易：$\int F(x)g'(x)dx$

注意按照此顺序思考

例1. 含x^2, a^2的式子 (1) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (2) $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ (3) $\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(4) $\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)}$ 拆项 $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$. 类似 $\frac{1}{x(1+x)}$ 分项 (5) $\int\frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx$

例2. 大杂烩

(1) $\int\cot^2xdx$　$\cot^2x=\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}=\frac{1}{\sin^2x}-1$

(2) $\int\sin\sqrt xdx$. 令 $t=\sqrt x$　$\int\sin t\cdot2tdt$

(3) $\int\frac{x^3+\ln x^3}{x}dx$.　$\ln x^3=3\ln x$

(4) $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$　上下同乘 e^x

(5) $\int e^{4x}\cos e^{2x}dx$　分 $e^{4x}=e^{2x}\cdot e^{2x}$, 凑微分到后边 de^{2x}

(6) $\int\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt x}}dx$　令 $t=\sqrt x$　$\int\frac{2t}{\sqrt{1+t}}dt=2\left(\int\frac{1+t}{\sqrt{1+t}}dt-\int\frac{1}{\sqrt{1+t}}dt\right)$

(7) $\int\frac{1}{\cos^4x}dx$　$\frac{1}{\cos^2x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx$ ($1+\tan^2x$) $d\tan x$

(8) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2-4x+5}}dx$

(9) $\int\frac{\ln\ln x}{x}dx$

(10) $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$　令 $t=\sqrt{e^x-2}$

9 定积分

① Riemann可积的定义
- 分割. 任意
- 近似 任意
- 求和
- 取极限 对区间长度→0

注意上下限可以任意大小, 扩展定义 $\int_a^bf(x)dx=\begin{cases}a<b：定积分\\ a=b：0\\ a>b：-\int_b^af(x)dx\end{cases}$

② 定积分的性质总结
- 线性性质
- 区间可加性
- 保序性, 最大最小值定理, 绝对值不等式
- 积分中值定理 ⇓ 原函数存在定理 ⇓ N-L公式 换元定理、分部积分公式等

都可能在证明题中用到!

③ 变上限积分求导

$\left(\int_a^xf(t)dt\right)'$, $\left(\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right)'$, $\left(\int_{\varphi(x)}^af(t)dt\right)'$, $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)dt\right)'$, $\left(\int_a^x\underline{F(x,t)}dt\right)'$ ↓要将x分离

10 多元函数微积分

关注与一元微积分的区别

1、距离 $\xrightarrow[定义拓展]{导致}$
- 邻域
- 有界
- 极限、连续
- 可微
- 极值
- …

2、导数、偏导数 高阶导数有混合偏导数、链式法则

3、极值点的二阶判断条件：Hessian矩阵

4、条件极值

5、二重积分转化为一重积分